

严格 Janbu 法不收敛原因及其改进的探讨

李志刚, 曹 磊

(解放军理工大学 工程兵工程学院, 江苏 南京 210007)

摘 要: 对严格 Janbu 法公式重新进行了推导, 在深入分析的基础上对其求解流程进行改进, 变求导为积分, 避开了求导误差。通过对算例的分析, 指出严格 Janbu 法不收敛的根本原因是其推力线高度的假设不合理。

关 键 词: 严格 Janbu 法; 求导误差; 推力线

中图分类号: TU 457

文献标识码: A

Discussion on cause of non-convergence in rigorous Janbu method and its modification

LI Zhi gang CAO Lei

(PLA University of Science and Technology, Nanjing 210007, China)

Abstract: On the basis of the fundamental principle of rigorous Janbu method, formulas are re-derived. Through modifying the flow of the method, the differential operation can be transformed to integral operation so as to avoid the derivative's error. The example analysis indicates that the inherent cause of non-convergence is the assumption of rigorous Janbu method; the assumption about the line of thrust is unreasonable.

Key words: rigorous Janbu method; derivative's error; line of thrust

1 引 言

边坡稳定性分析是岩土工程领域里一个经久不衰的研究课题。严格 Janbu 法^[1]自 1973 年提出后受到了广泛重视, 其存在严重的不收敛问题也引起了许多探讨, 很多文献认为二阶求导的误差是造成算法不收敛的根本原因。

本文先通过对算法流程的改进, 变求导为积分, 避开了求导误差, 在此基础上证明了严格 Janbu 法不易收敛的根本原因并不是二阶求导的误差。在对严格 Janbu 法进行了深入分析后作者认为其不收敛的根本原因在于算法本身存在的缺陷, 由于其假设的不合理造成了算法不可能收敛。

2 Janbu 法公式的推导

严格 Janbu 法最大的特点就是假设推力线高度, 一般假设其等于土条高度的 1/2 或 1/3。下面对严格 Janbu 法公式进行重新推导。

2.1 受力分析

边坡滑面 $y = s(x)$ 形状任意, 从中取出一土条进行分析。如图 1 所示, c 为条底黏聚力, 土层内摩擦角 ϕ , 条底摩擦系数 $\varphi = \tan \phi$, 土条宽块 Δx , 高 h , h_t 为土条间水平力作用线高度, 土条所受的力有:

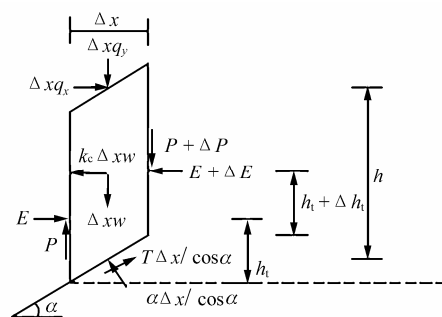


图 1 条块受力示意图

Fig.1 Force acting on a typical slice

(1) 水平和垂直方向的荷载 $\Delta xq_x, \Delta xq_y$;

- (2) 条块间的水平力 E 和切向力 P ;
- (3) 滑动面上的正应力 σ 和剪应力 τ ;
- (4) 条块的自重 $\Delta x w$;
- (5) 所受的地震力 $k_c \Delta x w$, k_c 为水平地震系数;
- (6) $u(x)$ 为滑面上孔隙水压力分布;
- (7) c 为条底黏聚力。

2.2 公式推导

首先以土条底线中点为取矩中心, 建立微分条块的力矩平衡方程。令 Δx 趋向无穷小, 略去高阶无穷小项, 导出式 (1):

$$P = E(x)s(x)' + [E(x)h_t]' + M \quad (1)$$

其中
$$M = \frac{1}{2} k_c w - q_x h(x)$$

力平衡方程为

x 方向:

$$\Delta E + k_c w \Delta x + \sigma \tan \alpha \Delta x = q_x \Delta x + \tau \Delta x \quad (2)$$

y 方向:

$$\sigma \Delta x + \tau \Delta x \tan \alpha = w \Delta x + \Delta P + q_y \Delta x \quad (3)$$

联立式 (2) 和式 (3) 两式, 令 Δx 趋向无穷小可得

$$\sigma = \frac{w + P' - E's' + s'(q_x - k_c w) + q_y}{1 + (s')^2} \quad (4)$$

将式 (1) 代入式 (4) 得

$$\sigma = \frac{w + Es'' + (Eh_t)'' + s'(q_x - k_c w) + q_y + M'}{1 + (s')^2} \quad (5)$$

由式 (2) 可得

$$E' = \tau - \sigma s' + q_x - k_c w \quad (6)$$

上式积分可得到条间水平力 E 的表达式:

$$E(x) = E(a) + \int_a^x (\tau - \sigma s' + q_x - k_c w) dx \quad (7)$$

a, b 为滑动面起始和终止点的横坐标。因为滑块起始和终止点处的水平力 E 为 0, 故有

$$\int_a^b (\tau - \sigma s' + q_x - k_c w) dx = 0 \quad (8)$$

由 Mohr-Coulomb 准则:

$$\tau = [(\sigma - u)\phi + c] / F_s \quad (9)$$

式 (8), (9) 联立, 得到安全系数的表达式:

$$F_s = \frac{\int_a^b [(\sigma - u)\phi + c] dx}{\int_a^b (k_c w - q_x + \sigma s') dx} \quad (10)$$

由此得到了一组迭代求解安全系数的公式, 流程图如图 2。

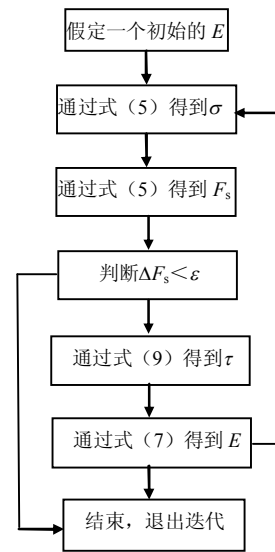


图 2 流程图
Fig.2 Flow chart

3 误差分析

采用澳大利亚计算机应用协会 (ACADS) 公布的标准试题对严格 Janbu 法进行检验, 边坡剖面如图 3, 边坡材料参数如表 1。

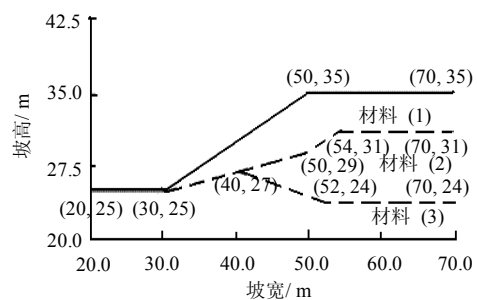


图 3 算例边坡剖面

Fig.3 Slope profile of example

表 1 边坡材料参数表

Table 1 Geotechnical properties of soil layers

材料号	$C / \text{kN} \cdot \text{m}^2$	$\phi / (^\circ)$	$\gamma / \text{kN} \cdot \text{m}^3$
材料 1	0.0	38	19.5
材料 2	5.3	23	19.5
材料 3	7.2	20	19.5

理论上严格 Janbu 法经过几次迭代后就可以得到任意形状滑动面的安全系数, 但作者用 MATLAB 编制了程序进行分析发现严格 Janbu 法存在严重的不收敛问题。图 4 是程序迭代 10 次后的结果:

程序中设定土条数为 100, 在 Janbu 本人提供的例题中滑动土体只有 4, 5 个土条, 条块数目越多

收敛就越困难。而事实上采用有限差分法计算一阶和二阶导数时, 条块数越多, 其精确度理应越高才对。从这一矛盾中应该就能看出, 二阶求导并不是 Janbu 法不收敛的原因。

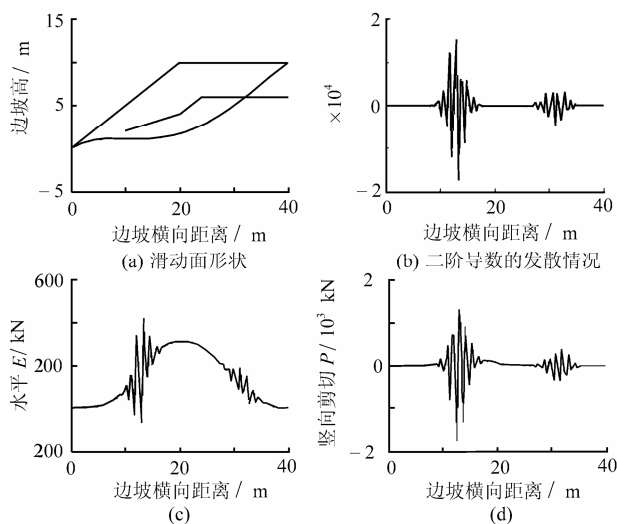


图4 程序运行结果

Fig.4 Result of the program

作者采用三次样条函数对离散的点先进行拟合再求导, 样条函数拟合得到的曲线可以保证一阶连续二阶可导。从图4可以发现, 二阶导数只在局部存在发散现象, 在其他位置并不发散。

有不少学者提出过改进求导的方法, 文献[2]就提出过一种数值平滑技术, 改进一阶和二阶导数。但各种改进的 Janbu 法都只是对指定的滑动面进行分析, 直到现在仍没有任何一种改进 Janbu 法可以真正实现对任意滑动面的求解, 这也从侧面说明了 Janbu 法不收敛的原因并不是二阶求导的误差。

4 深入分析

观察图4发现, 水平力 E 发散并不严重, 而竖向剪切力 P 的发散很严重, 二阶导数只是局部发散, 而且发散的位置与 P 发散的位置相同, 因此作者认为是竖向剪切力 P 的发散导致了二阶导数的发散, 从而最终导致严格 Janbu 法严重发散。

为了证实这一观点, 作者在不改变 Janbu 法公式的前提下对图2所示流程进行了调整, 变求导为积分, 由微观到宏观。经过改进, 每一个变量都是通过积分得到, 这样就不存在求导误差, 得到新流程图如图5所示。

作者用 MATLAB 编程进行分析, 发现结果仍发散, 在迭代中作者发现竖向剪切力 P 的值严重偏离正常值, 如图6所示。

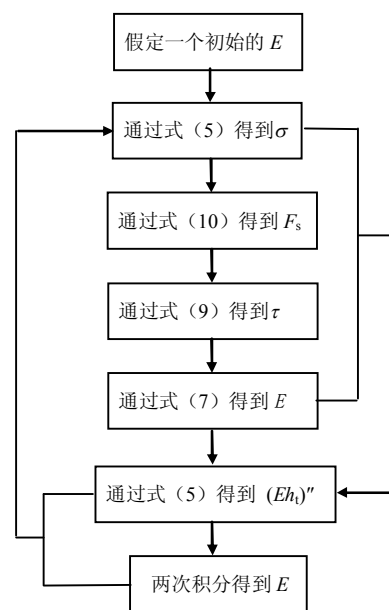


图5 改进流程图

Fig.5 The modified flow chart

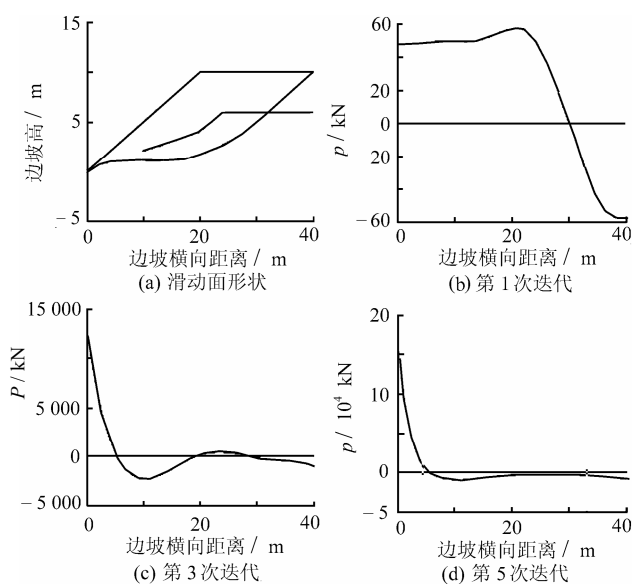


图6 改进后程序运行的结果

Fig.6 Result of the modified program

根据边界条件, 起始和结束位置的竖向剪切力应等于0。从图6可以看出, 在初次迭代后 P 的值就已经不满足边界条件了, 随后越来越发散。

作者认为造成这种情况的根本原因在于 Janbu 法的假设不合理。竖向剪切力 P 是由式(1)求出的, 需要用到条间水平力作用线高度 h_i , Janbu 法无法得到 h_i , 于是就假设作用点位于土条垂直高度的中点或下 1/3 处, 这样假设显然与实际不符, 缺乏足够的理论依据。迭代运算是一个不断调整的过程, 变量通过调整而趋于完善, 如果将其中一个变量值规定为定值, 必然会影响到其它变量。在迭代

过程中得到的每一点的 P 值都不准确,某些位置偏离还会较大,这些迅速发散的位置就导致图 4 中的局部严重发散,并导致严格 Janbu 法最终结果不收敛。

文献[3]提出的改进型 Janbu 法,采用拟合的办法得到新的推力线,并在例题中得到了相对准确的结果。但这种改进方法也说明了严格 Janbu 法假设的不合理,拟合只是把发散向后推迟,但并不能改变 Janbu 法的本质。

规定推力线高度,导致在迭代过程中竖向剪切力越来越发散,这才是严格 Janbu 法不收敛的根本原因。

5 结 语

Janbu 曾于 1954 年提出过简化 Janbu 法^[4],忽略竖向剪切力,后来提出的严格 Janbu 法为了求竖向剪切力而引入力矩平衡,但同时又引入了新变量——推力线高度,于是严格 Janbu 法就对推力线高度做了假设。

基于以上分析,作者认为严格 Janbu 法是简化 Janbu 法的倒退,严格 Janbu 法基于错误的假设,很难得到收敛的结果。文献[5]也曾对其做过尝试,结果表明,严格 Janbu 法只有在条块数很少,并且初始解比较接近最终解时才能收敛,这样就已经失去了算法本来的意义。严格 Janbu 法使用条件苛刻,而且收敛困难,因此作者建议在编制分析软件以及工程实际中尽量不要采用严格 Janbu 法。

参 考 文 献

- [1] JANBU N. Slope stability computations[C]// Proceedings of Embankment Dam Engineering New York: John Wiley and Sons, 1973, 47—86.
- [2] ZHU D Y, LEE C F, JIANG H D. Generalised framework of limit equilibrium methods and numerical procedure for slope stability analysis[J]. **Geotechnique**, 2003, 53(4): 377—395.
- [3] 朱大勇, 李焯芬, 黄茂松, 等. 对 3 种著名边坡稳定性计算方法的改进[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(2): 184—194.
ZHU Da-yong; Lee C F, HUANG Mao-song; et al. Modifications to three well-known methods of slope stability analysis[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2005, 24(2): 184—194.
- [4] JANBU N. Application of composite slip surface for stability analysis[C]// Proceedings of European conference on stability of earth slopes, Stockholm, Sweden: [s.n.] 1954.43—49.
- [5] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析—原理方法程序[M]. 北京: 中国水利电力出版社, 2003:53—56.
- [6] 杨明成. 一般条分法的安全系数显示解[J]. 岩土力学, 2004, 25 (增刊): 568—573.
YANG Ming-cheng. Explicit solution to safety factor for general slice method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2004, (S2): 568—573.
- [7] 张鲁渝, 郑颖人. 简化 Bishop 法的扩展及其在非圆弧滑动面中的应用[J]. 岩土力学, 2004, 25(6): 927—929, 934.
ZHANG Lu-yu; ZHENG Ying-ren. An extension of simplified Bishop method and its application to non-circular slip surface for slope stability analysis[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2004, 25(6): 927—929, 934.